1	2	3	4	5
B	B	B	B	B-

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted] MAIL:

LIBRETA: 486/17 TURNO: 14 a 17 | 19 a 22

Álgebra Lineal - Segundo Cuatrimestre 2017

Primer Recuperatorio del Primer Parcial (12/12/2017)

1. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Sean $S, T \subset V$ subespacios tales que $V = S \oplus T$. Si $f : V \to W$ es una transformación lineal, probar que

HOJA 1 y 2

$$f \text{ es isomorfismo} \iff W = f(S) \oplus f(T).$$

2. Para cada $1 \leq k \leq 5$, definimos $\varphi_k \in (\mathbb{R}^5)^*$ como $\varphi_k(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{l=1}^{k} l \cdot x_l$.

HOJA 3, 4, 5

   a) Probar que $\mathcal{B}' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ es una base de $(\mathbb{R}^5)^*$ y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$ tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$. Para cada $1 \leq j \leq 5$, definimos $\psi_j \in (\mathbb{R}^5)^*$ como $\psi_j = \varphi_j \circ f$. Probar que $\mathcal{B}'' = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5\}$ es una base de $(\mathbb{R}^5)^*$ y hallar la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

3. Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 6}$ y $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida como $f(x) = Ax$.

HOJA 14 y 13

~~Si se sabe que~~ $\cancel{\det\begin{pmatrix} a_{13} & a_{15} & a_{16} \\ a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{43} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} = 1}$ ~~y~~ $\cancel{f(1,0,0,0,0,0) = f(1,1,0,0,0,0) = (1,1,1,1)}$, hallar **todos** los posibles valores que puede tomar $\dim(\mathrm{Im}(f))$. Para cada valor posible, definir una transformación lineal f que cumpla las condiciones anteriores.

4. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con $\det(A) = 2$ y $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b$.

HOJA 6

Si $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, calcular

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ A & b \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tal que $m_A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$. Sea $M = A^2 + A - 6I \in \mathbb{C}^{5\times 5}$. Sabiendo que $\mathrm{tr}(M) = 0$ y $\mathrm{rg}(A) = 4$, hallar **todos** los autovalores de A y, para cada uno de ellos, determinar su multiplicidad como raíz de χ_A. ¿Cuál es el rango de M? NO

HOJA 9 y 10

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1

① Datos V, W, K-e.v de dim $n \in \mathbb{N}$. $S, T \subseteq V$ subespacios tales que $S \oplus T = V$

Probemos $\Longrightarrow$

Quiero ver que $W = f(S) \oplus f(T)$

Por propiedad, existen únicos $s' \in \operatorname{Im} f|_S$ y $t' \in \operatorname{Im} f|_T$ tal que

$\forall w \in W \quad w = s' + t'$

$\uparrow$

esto es lo que quiero ver

No corresponde ~~Tomemos $v \in V$. Como $V = S \oplus T$, existen únicos $s \in S$ y $t \in T$ tales~~ que $v = s + t$

Tomemos base de S $B_S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ $(\dim S = r)$ y $B_T = \{t_{r+1}, \dots, t_n\}$ $(\dim T = n - r)$

Recordemos que si $V = S \oplus T$, entonces $B = B_S \cup B_T$ es base de V.

Entonces si tomamos $v \in V$, existen $s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i s_i \in S$ y $t = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i t_i \in T$

tales que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i s_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i t_i$

Apliquemos f

Distribuye ~~separo~~ f porque es t.l

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i s_i\right) + f\left(\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i t_i\right)$$

$$w = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(s_i) + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i f(t_i)$$

Recordemos que como $f: V \to W$ es una t.l, con $\dim V = \dim W$ y es isomorfismo, entonces

si tomo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V, se sigue que $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ es base de $\operatorname{Im} f \underset{\uparrow}{=} W$

Como partimos de una base $B=\{s_1, s_2, \dots, s_r, t_{r+1}, \dots, t_n\}$ de V.

y c $f: V \to W$ es isomorfismo , entonces $\{f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_r), f(t_{r+1}), \dots, f(t_n)\}$

es una base de W. Por construcción , $f(B)$ (base transformada)

tiene una base $B_{f(S)}$ de $f(S)$ y otra $B_{f(T)}$ de $f(T)$. Tenemos entonces que

$$f(B) = B_{f(S)} \cup B_{f(T)} \quad \text{l.i base de } W$$

Luego existen únicos $w \in W$ tal que $w = s' + t'$ con $s' \in f(S)$, $t' \in f(T)$

lo cual, quiere decir que $W = f(S) \oplus f(T)$ $\Longleftarrow$ Consecuencia de que $\exists!\, k_i \in K$ tal que $\forall w \in W \quad w = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$

Probemos $\Leftarrow$

Quiero que ver $f: V \to W$ es isomorfismo

Sé que $V = S \oplus T$ y $W = f(S) \oplus f(T)$

~~Como $0_W \in W$, como $W = f(S) \oplus f(T)$, entonces $\forall w \in W$, $\exists!\, s' \in f(S)$~~

~~y $t' \in f(T)$ / $w = s' + t'$~~

~~En este caso $0_W = s' + t'$. como $s' \in f(S)$ y $t \in f(T)$, existen $s \in S$ y $t \in T$~~

~~tales que $s' = f(s)$ y $t' = f(t)$~~

~~Entonces $0_W = f(s) + f(t) = f(s+t)$~~
~~f es t.l~~

~~sabemos que si $V = S \oplus T$, entonces $\exists!$ ~~$k \in K$ tal que~~ $\forall v \in V \quad \exists!\, s \in S$~~

~~y $t \in T$ / $v = s + t$~~

~~Por ejemplo, si tomamos $0_V = s + t$, sabemos que $s = 0$, y $t = 0_V$,~~

~~por propiedad, entonces son los únicos~~

~~y por la unicidad de ... obtenido como consecuencia de $w = s' + t'$, se~~

~~tiene que $Nu f = \{0\}$~~

~~Entonces f es monomorfismo. Como $f: V \to W$, con dim V = dim W. Es, equivalente a decir~~

Tomo $w \in W$. Como $W = f(S) \oplus f(T)$, entonces $\forall w \in W$, $\exists!\, s' \in f(S)$ y $t' = F(T)$ / $w = s' + t'$

Como $s' \in f(S)$ y $t' \in f(T)$, entonces existen $s, t \in S, T$ respectivamente tales que $s' = f(s)$ y $t' = f(t)$

Entonces $w = \overset{\text{únicos}}{f(s) + f(t)} = \overset{\text{únicos}}{f(s+t)}$

como $V = S \oplus T$, existen únicos $s \in S$, $t \in T$ tal que $\forall v \in V$, $v = s + t$

Si tomamos $w = 0_W$, entonces $0_W = f(s) + f(t) = f(s+t)$.

y $s = 0_V$ y $t = 0_V$ satisfacen la igualdad. Por la proposición, luego son los únicos; los únicos tales que $0_W = \underbrace{\underset{\in f(S)}{0_W} + \underset{\in f(T)}{0_W}}_{\text{los únicos}}$ y $f(0_V) = 0_W$ es único

Entonces $Nu f = \{0\} \Rightarrow f$ monomorfismo. Como $f: V \to W$ y dim V = dim W

Es equivalente a decir que isomorfismo.

B

(2) a) $\varphi_1 = x_1$

$\varphi_2 = x_1 + 2x_2$

$\varphi_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$\varphi_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$\varphi_5 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$

Veamos que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ es base de $(\mathbb{R}^5)^*$

$\dim \mathbb{R}^5 = 5 \Longrightarrow \dim (\mathbb{R}^5)^* = 5 \Longrightarrow$ basta ver que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ es l.i

Base dual canónica de $(\mathbb{R}^5)^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\} = E^*$

Analizo la independencia lineal de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ por medio sus coordenadas en la base E^*

$(\varphi_1)_{E^*} = (1,0,0,0,0)$

$(\varphi_2)_{E^*} = (1,2,0,0,0)$

$(\varphi_3)_{E^*} = (1,2,3,0,0)$

$(\varphi_4)_{E^*} = (1,2,3,4,0)$

$(\varphi_5)_{E^*} = (1,2,3,4,5)$

A ojo se ven que son l.i porque están triangulados

Luego $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ es base de $(\mathbb{R}^5)^*$

Busco $B=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ base de $\mathbb{R}^5$ tal que $B^* = B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$

Quiero que

$$\begin{array}{lllll}
\varphi_1(v_1)=1 & \varphi_1(v_2)=0 & & & \\
\varphi_2(v_1)=0 & \varphi_2(v_2)=1 & & & \\
\varphi_3(v_1)=0 & \varphi_3(v_2)=0 & \varphi_3(v_3)=1 & & \\
\varphi_4(v_1)=0 & \varphi_4(v_2)=0 & & \varphi_4(v_4)=1 & \varphi_4(v_5)=0 \\
\varphi_5(v_1)=0 & \varphi_5(v_2)=0 & & & \varphi_5(v_5)=1
\end{array}$$

Entonces, tengo una matriz de sistema de ecuaciones múltiple

$$\begin{array}{lcccc}
x_1 = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 + 2x_2 = 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \\ F_5 - F_1 \to F_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 - F_2 \to F_4 \\ F_5 - F_2 \to F_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 - F_3 \to F_4 \\ F_5 - F_3 \to F_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ F_5 - F_4 \to F_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} F_2 \to F_2 \\ \frac{1}{3} F_3 \to F_3 \\ \frac{1}{4} F_4 \to F_4 \\ \frac{1}{5} F_5 \to F_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}
\end{array}\right)$$

$v_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$

$v_2 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, 0)$

$v_3 = (0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0)$

$v_4 = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5})$

$v_5 = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5})$

luego $B = \{(1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}), (0, 0, 0, 0,$

b) $\varphi_1 = x_2$

$\varphi_2 = x_2 + 2x_3$

$\varphi_3 = x_2 + 2x_3 + 3x_4$

$\varphi_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$

$\varphi_5 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_1$

$\downarrow$ Uso mismo razonamiento que en a para ver que es base de $(\mathbb{R}^5)^*$ (sólo basta ver que es l.i)

$(\varphi_1)_{E^*} = (0, 1, 0, 0, 0)$

$(\varphi_2)_{E^*} = (0, 1, 2, 0, 0)$

$(\varphi_3)_{E^*} = (0, 1, 2, 3, 0)$

$(\varphi_4)_{E^*} = (0, 1, 2, 3, 4)$

$(\varphi_5)_{E^*} = (5, 1, 2, 3, 4)$

$\downarrow$ Veo si es l.i

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_5} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ERA FÁCIL ESTO CON DET.

$$
\begin{array}{l} F_3-F_2\to F_3 \\ F_4-F_2\to F_4 \\ F_5-F_2\to F_5 \end{array}
\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}
\; F_3 \leftrightarrow F_5 \;
\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}
$$

Es l.i

$\Downarrow$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ es base de $(\mathbb{R}^5)^*$

~~Otra base~~

Para hallar $C(B'', B')$ me baso en esta B base de $\mathbb{R}^5$ tal que $B^* = B'$ y $\tilde{B}$, base de $\mathbb{R}^5$ tal que $\tilde{B}^* = B''$, entonces

$$C(B'', B') = C(B, \tilde{B})^t$$

Hallo $\tilde{B}$

Hago el mismo método de antes

$\tilde{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_4]{F_1 \leftrightarrow F_5}
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
F_3 \leftrightarrow F_5
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{l} F_1-F_2\to F_1 \\ \\ F_3-F_2\to F_3 \\ F_4-F_2\to F_4 \\ F_5-F_2\to F_5 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
F_2+F_3\to F_2
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
F_3-F_4\to F_3
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$F_4 - F_5 \to F_4 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{5}F_1 \\ \\ -\frac{1}{2}F_3 \\ -\frac{1}{3}F_4 \\ -\frac{1}{4}F_5 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\tilde{B} = \left\{ (0,1,-\tfrac{1}{2},0,0),\ (0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3},0),\ (0,0,0,\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{4}),\ (-\tfrac{1}{5},0,0,0,\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{5},0,0,0,0) \right\}$$

Hallo $C(B,\tilde{B}) = \left((v_1)_{\tilde{B}} \,\middle|\, (v_2)_{\tilde{B}} \,\middle|\, (v_3)_{\tilde{B}} \,\middle|\, (v_4)_{\tilde{B}} \,\middle|\, (v_5)_{\tilde{B}} \right)$

$(1,-\frac{1}{2},0,0,0) = a\,(0,1,-\frac{1}{2},0,0) + b\,(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},0) + c\,(0,0,0,\frac{1}{3},-\frac{1}{4}) + d\,(-\frac{1}{5},0,0,0,\frac{1}{4}) + e\,(\frac{1}{5},0,0$

$(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},0,0) = \tilde{a}$ " $+\tilde{b}$ "

$(0,0,\frac{1}{3},-\frac{1}{4},0) = \tilde{\tilde{a}}$ " $+\tilde{\tilde{b}}$ "

$(0,0,0,\frac{1}{4},-\frac{1}{5}) = \tilde{\tilde{\tilde{a}}}$ " $+\tilde{\tilde{\tilde{b}}}$ "

$(0,0,0,0,\frac{1}{5}) = \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{a}}}}$ " $+\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{b}}}}$ "

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1 \to F_5 \\ F_2 \to F_1 \\ F_3 \to F_2 \\ F_4 \to F_3 \\ F_5 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right.$$

$F_2 + \frac{1}{2}F_1 \to F_2$

$F_4 +$

$$\begin{array}{c} \\ 2F_2 \\ 3F_3 \\ 4F_4 \\ 5F_5 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2+F_1\to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

~~$F_4+F_3\to F_4$~~

$$F_3+F_2\to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_4+F_3\to F_4 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{20} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_5+F_4\to F_5 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{20} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{20} & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

(B)

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C(B,\tilde{B})}$$

$$C(B,\tilde{B})^t = C(B'',B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +\frac{3}{4} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Claramente este no era el mejor camino.

Para el futuro,

$$C_{B'',B'} = \begin{pmatrix} [\psi_1]_{B'} & \cdots\cdots & (\psi_5)_{B'} \end{pmatrix}$$

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i \varphi_i \longrightarrow \alpha_i = \psi_j(v_i)$$

Los α_i los despejas evaluando en $\{v_1, \dots, v_5\}$ (para eso estaba el punto (a)).

(4) $\det\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & A & & b \\ & & & \end{array}\right)$

$\det(A)=2$ y $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces A es inversible

Separo en casos $b=0$

$\downarrow$

$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$ satisface la ecuación pero $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ también

¡Ab!

Porque al ser A inversible, es un sistema con solución única (compatible determinado)

$A=\left(A_1 \middle| A_2 \middle| A_3\right)$

entonces $b \neq 0$.

Desarrollo

1ra fila

$$\det\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & A & & b \end{array}\right) = 1\cdot\det\left(A_2 \middle| A_3 \middle| b\right) - 1\cdot\det\left(A_1 \middle| A_3 \middle| b\right) + 1\cdot\det\left(A_1 \middle| A_2 \middle| b\right)$$

$$= -\det\left(A_3 \middle| A_2 \middle| b\right) + \det\left(A_1 \middle| b \middle| A_3\right) + \det\left(A_1 \middle| A_2 \middle| b\right)$$

$$= \det\left(b \middle| A_2 \middle| A_3\right) + \det\left(A_1 \middle| b \middle| A_3\right) + \det\left(A_1 \middle| A_2 \middle| b\right)$$

Por regla de Krammer, como $Ax=b$ es S.C.D y $(1,2,3)$ solución, entonces

$1 = \dfrac{\det(b|A_2|A_3)}{\det A}$ | $2 = \dfrac{\det(A_1|b|A_3)}{\det A}$ | $3 = \dfrac{\det(A_1|A_2|b)}{\det A}$

$1 = \dfrac{\det(b|A_2|A_3)}{2}$ | $2 = \dfrac{\det(A_1|b|A_3)}{2}$ | $3 = \dfrac{\det(A_1|A_2|b)}{2}$

$2 = \det(b|A_2|A_3)$ | $4 = \det(A_1|b|A_3)$ | $6 = \det(A_1|A_2|b)$

Entonces $\det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & A & & b \end{array} \right) = 2 + 4 + 6 = 12$

B

(hiciste el ejercicio como yo lo pensé, quien lo propuso quería que se usen las propiedades del det).

'4/

③ Por como está definida la t.l, entonces dim(Imf) = rg (A) y

$(1,1,1,1) \in Imf$ por dato $\Longrightarrow$ dim Imf = rg A ≥ 1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix}$$

rg A = dim Imf puede ser

un menor de A que vale $1 \overset{\neq 0}{\Longrightarrow}$ ~~rg(A) = dim(Imf)~~

entonces dim Imf = 3 o 4 → está acotado por este valor porque dim Imf ≤

Doy ejemplo de f tal que dim Imf = 3

~~$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$~~

~~dim Nuf = 3~~ ~~dim Imf = 3~~ ~~Imf = <(1,1,1,1), (0,2,1,0)>~~

~~Nuf = <e_1, e_2, e_4>~~

No corresponde

Elijo esta f: que cumple dim Imf = 3

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^t$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$ verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_5 \to C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$rg(A) = \dim \operatorname{Im} f = 3$

Verifica la propiedad

Por teo de la dim $\longrightarrow \dim \operatorname{Nuc} f = 3$

~~dim Nu f = 3~~

$= A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$) = (1,1,1,1)$ se cumple

$0) = f(1,0,0,0,0,0) + f(0,1,0,0,0,0) = (1,1,1,1) + (0,0,0,0) = (1,1,1,1)$ se cumple

$\underset{e_1}{A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + \underset{e_2}{A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$

f con $\dim(\operatorname{Im} f) = 4$

$$) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ verifica}$$

$f(1,0,0,0,0,0) = (1,1,1,1)$

$f(1,1,0,0,0,0) = f(1,0,0,0,0,0) + f(0,1,0,0,0,0) = (1,1,1,1) + (0,0,0,0) = (1,1,1,1)$

se cumple ~~otra~~ condición

Veamos que cumple $\dim(\operatorname{Im} f) = rg(A) = 4$ como propuse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_3 \to C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_5 \to C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 - C_6 \to C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\dim(\operatorname{Im} f) = rg A = 4$

se cumple

(B)

9

⑤ Por Hamilton-Cayley $m_A | \chi_A$

$m_A = x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-3)(x-2) \Rightarrow$ como A se factoriza linealmente, A diagonalizable

Los autovalores de A son 0, 2, 3. Falta determinar su multiplicidad

~~$tr(M) = tr(A^2) + tr(A) - tr(6I)$~~

~~$0 = tr(A^2 + A) - 6 \cdot 5$~~

~~$6 \cdot 5 = tr(A^2 + A)$~~

~~$30 = tr(A \cdot (A + I))$~~

Como A era diagonalizable, existen $C \in GL(5, \mathbb{C})$ tal que

$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ con D diagonal de autovalores $\in \mathbb{C}^{5 \times 5}$

$tr(M) = tr(A^2 + A - 6I)$

$tr(M) = tr(A^2) + tr(A) - tr(6I)$

dato $\Vert$

$0 = tr(CD^2C^{-1}) + tr(CDC^{-1}) - 5 \cdot 6$

$0 = tr(C^{-1} \cdot C \cdot D^2) + tr(C^{-1}CD) - 30$

conmutatividad de traza

OJO, la traza no es conmutativa

ES TRACIAL.

TRACIAL $\neq$ CONMUTATIVO.

$0 = tr(I \cdot D^2) + tr(I \cdot D) - 30$

$0 = tr(D^2) + tr(D) - 30$

$30 = tr(D^2) + tr(D)$

Notemos que como $A = C \cdot D \cdot C^{-1} \Rightarrow A \sim D \Rightarrow rg\, A = rg\, D$

como $rg(A) = 4 \Rightarrow$ 0 es autovalor simple

Entonces $tr(D) = 0 + 2 + 3 + \lambda_1 + \lambda_2$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \{2,3\}$

$$30 = tr(D^2) + tr(D)$$

$$30 = (2^2 + 3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2) + (2 + 3 + \lambda_1 + \lambda_2)$$

$$30 = 13 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 5 + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$30 = 18 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$12 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

Tenemos 3 posibilidades

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 3) $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$

Veamos cuál cumple

$12 = 2^2 + 2^2 + 2 + 2$

$12 = 4 + 4 + 4$

$12 = 12 \implies$ 1) verifica

$12 = 3^2 + 3^2 + 3 + 3$

$12 = 9 + 9 + 6$

$12 = 24$ Abs 2) no verifica

$12 = 2^2 + 3^2 + 2 + 3$

$12 = 4 + 9 + 6$

$12 = 19$ Abs! 3) no verifica

Entonces ~~los autovalores~~ $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-3)(\lambda-2)^3$.

Entonces 0 autovalor simple, 3 autovalor simple, 2 autovalor triple

10

$$M = A^2 + A - 6I = C \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix}^2 C^{-1} + C \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & & & & 0 \\ & -6 & & & \\ & & -6 & & \\ & & & -6 & \\ 0 & & & & -6 \end{pmatrix}$$

$$= C \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 9 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 4 \end{pmatrix} C^{-1} + C \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix} C^{-1} + \begin{pmatrix} -6 & & & & 0 \\ & -6 & & & \\ & & -6 & & \\ & & & -6 & \\ 0 & & & & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 9 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & 4 & \\ 0 & & & & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} -6$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 13 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ 0 & & & & 7 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} -6 & & & & \\ & 6 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 13 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ 0 & & & & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{rg(M) = rg(N) = 5}\ 2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad R^+$$

$$N$$